Exercice N° 1

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}u_n + \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. ..

a. Montrer que : pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n > 1$. .... (0,5)

On note la relation : $u_n > 1$ par (1)

- On vérifie que la relation (1) est vraie pour $n = 0$.

  on a : $u_0 = 2 > 1$ d'où la relation (1) est vraie pour $n = 0$.

- On suppose que la relation (1) est vraie pour n de $\mathbb{N}$ ou encore $u_n > 1$ est vraie (hypothèse de récurrence)

- On montre que : la relation (1) est vraie pour $n+1$. (ou encore à démontrer que $u_{n+1} > 1$)

  d'après hypothèse de récurrence on a :

$$u_{n+1} - 1 = \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}u_n + \frac{2-\sqrt{2}}{2}}_{u_{n+1}} - 1$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}u_n + \cancel{\frac{2}{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \cancel{1}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(u_n - 1) > 0 \text{ ; car } u_n > 1 \ (\text{hypothèse de récurrence})$$

Donc : $u_{n+1} - 1 > 0$ d'où : $u_{n+1} > 1$

D'où : la relation (1) est vraie pour $n+1$.

Conclusion : $\boxed{u_n > 1 \text{ pour tout n de } \mathbb{N}}$.

b. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ $u_{n+1} - u_n = \frac{2-\sqrt{2}}{2}(u_n - 1)$ et déduire que la suite (u_n) est décroissante et convergente. .... (0,75)

- Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ $u_{n+1} - u_n = \frac{2-\sqrt{2}}{2}(u_n - 1)$.

On a : $u_{n+1} - u_n = \frac{2-\sqrt{2}}{2}(u_n - 1) - 1$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)u_n + \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}-2}{2}u_n + \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{2-\sqrt{2}}{2}(u_n - 1) \ \left(\text{car } \frac{\sqrt{2}-2}{2} = -\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$$

Conclusion 1 : $u_{n+1}-u_n=\frac{2-\sqrt{2}}{2}(u_n-1)$.

- **Déduire que la suite (u_n) est décroissante et convergente.**

On a : $u_{n+1}-u_n=\frac{2-\sqrt{2}}{2}\left(\underbrace{u_n\ -\ 1}_{<0 \text{ car } u_n>1}\right)<0$ et on a $2>\sqrt{2}$.

D'où : $u_{n+1}-u_n<0$ donc $u_{n+1}<u_n$ par suite la suite (u_n) est décroissante.

On a la suite (u_n) est décroissante et minorée par 1 ; (car $u_n>1$).

Conclusion 2 : la suite (u_n) est convergente.

2. On pose pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n=u_n-1$.

a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison et son premier terme. …... (0,5)

Soit n de $\mathbb{N}$

On a : $v_{n+1}=u_{n+1}-1=\frac{\sqrt{2}}{2}(u_n-1)$ déja calculer voir récurrence 3ième étape

$$\left.\begin{aligned}&=\frac{\sqrt{2}}{2}u_n+\frac{2-\sqrt{2}}{2}-1\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}u_n-\frac{\cancel{2}-\sqrt{2}-\cancel{2}}{2}\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}u_n-\frac{\sqrt{2}}{2}\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}(u_n-1)\end{aligned}\right\|\text{déja calculer voir récurrence}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}v_n$$

Donc : $v_{n+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}v_n$

Conclusion : la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q=\frac{\sqrt{2}}{2}$ de premier terme $v_0=u_0-1=2-1=1$.

b. Écrire u_n en fonction de n puis déduire la limite de la suite (u_n) ………………………………… (0,5)

- **D'abord on écrit v_n en fonction de n.**

On a : (v_n) est une suite géométrique donc son terme général est de la forme :

$$\begin{aligned}v_n&=v_{n_0}\times q^{n-n_0} \text{ avec } n_0=0\\&=v_0\times q^{n-0}\\&=1\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\end{aligned}$$

D'où : $v_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$.

- On écrit u_n en fonction de n.

On a : pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n = u_n - 1$ donc $u_n = v_n + 1$ par suite $u_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n + 1$.

Conclusion : pour tout n de $\mathbb{N}$ on a : $u_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n + 1$.

- Déduire la limite de la suite (u_n).

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n + 1 = 1$ car $-1 < q = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ et $\sqrt{2} \simeq 1,414$).

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

c. Calculer la somme $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{2021}$. ………………………………………… (0,25)

On a : $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{2021}$ on a : $2021 + 1 = 2022$ termes

$$\begin{aligned} &= (v_0+1)+(v_1+1)+\cdots(v_{2021}+1) \\ &= v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{2021} + (2021+1)\times 1 \\ &= \frac{1-q^{2021+1}}{1-q} + 2022 \\ &= \frac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2021+1}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} + 2022 \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{S = \frac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2022}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} + 2022}$.

Exercice N° 2

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère les deux points : $A(1,-1,1)$ et $B(5,1,-3)$. Soit (S) la sphère de centre le point $\Omega(3,0,-1)$ et pour rayon $R = 3$, et (Δ) la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}(2,-2,1)$.

1. ..

a. Calculer la distance ΩA. ………………………………………… (0,25)

On a : $\overrightarrow{\Omega A}\begin{pmatrix}1-3\\-1-0\\1+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}$ d'où : $\Omega A=\sqrt{(-2)^2+(-1^2)+2^2}=\sqrt{9}=3$.

Conclusion : $\boxed{\Omega A=3}$.

b. Montrer que les droites (Δ) et (ΩA) sont perpendiculaires. .... (0,5)

On a :

- (Δ) a pour vecteur directeur $\vec{u}(2,-2,1)$.
- (ΩA) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{\Omega A}(-2,-1,2)$.

Par suite : $\vec{u}.\overrightarrow{\Omega A}=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}=2\times(-2)+(-2)\times(-1)+1\times2=0$.

D'où : $\vec{u}.\overrightarrow{\Omega A}=0$ par suite $\vec{u}\perp\overrightarrow{\Omega A}$.

Conclusion : (Δ) et (ΩA) sont perpendiculaires.

c. Déduire la position relative de la droite (Δ) et la sphère (S). .... (0,25)

On a : $(\Delta)\perp(\Omega A)$ et $A\in(S)$ donc $d(\Omega,(\Delta))=\Omega A=3=R$.

Conclusion : (Δ) est tangente à la sphère (S) en A.

2. Soit le point $M_a(2a-3,3-2a,a-1)$ où $a\in\mathbb{R}$ montrer que $\overrightarrow{AM_a}=(a-2)\vec{u}$ et déduire que $M_a\in(\Delta)$ pour tout $a\in\mathbb{R}$. .... (0,5)

- Montrer que $\overrightarrow{AM_a}=(a-2)\vec{u}$.

On a : $\overrightarrow{AM_a}=\begin{pmatrix}2a-4\\3-2a+1\\a-1-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a-4\\-2a+4\\a-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2(a-2)\\-2(a-2)\\a-2\end{pmatrix}=(a-2)\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}=(a-2)\vec{u}$.

Conclusion : $\boxed{\overrightarrow{AM_a}=(a-2)\vec{u}}$.

- Déduire que $M_a\in(\Delta)$ pour tout $a\in\mathbb{R}$.

On a :

- $a\in\mathbb{R}$ donc $a-2\in\mathbb{R}$.
- $\overrightarrow{AM_a}=(a-2)\vec{u}$
- (Δ) la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}(2,-2,1)$.

Conclusion : $M_a\in(\Delta)$ pour tout $a\in\mathbb{R}$.

3.

a. Vérifier que $2x-2y+z-9a+13=0$ est une équation du plan (P_a) passant M_a et perpendiculaire à la droite (Δ). .... (0,5)

- Le plan (P_a) passant M_a est perpendiculaire à la droite (Δ) donc $\vec{u}(2,-2,1)$ est un vecteur normal à (P_a) .

- D'où : équation cartésienne de (P_a) est de la forme $2x-2y+z+d=0$.
- $M_a(2a-3,3-2a,a-1)\in(P_a)$ donc :

$$\begin{aligned}2(2a-3)-2(3-2a)+(a-1)+d=0 &\Leftrightarrow 4a-6-6+4a+a-1+d=0\\ &\Leftrightarrow 9a-13+d=0\\ &\Leftrightarrow d=13-9a\end{aligned}$$

Conclusion : $2x-2y+z-9a+13=0$ est une équation du plan (P_a).

b. Montrer que $d(\Omega,(P_a))=|3a-6|$. .... (0,5)

On a : $d(\Omega,(P_a))=\dfrac{|2x_\Omega-2y_\Omega+z_\Omega-9a+13|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}$.

$$\begin{aligned}&=\frac{|2\times3-2\times0-1-9a+13|}{\sqrt{9}}\\ &=\frac{|-9a+18|}{3}\\ &=\frac{\cancel{|-3|}\,|-3a+6|}{\cancel{3}}\\ &=|3a-6|\end{aligned}$$

Conclusion : $d(\Omega,(P_a))=|3a-6|$

c. Déterminer les deux valeurs de a pour lesquelles le plan (P_a) est tangent à la sphère (S) . ... (0,5)

On a : plan (P_a) est tangent à la sphère $(S)\Leftrightarrow d(\Omega,P_a)=R=3$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow |3a-6|=3\\ &\Leftrightarrow 3a-6=3 \text{ ou } 3a-6=-3\\ &\Leftrightarrow 3a=9 \text{ ou } 3a=3\\ &\Leftrightarrow a=3 \text{ ou } a=1\end{aligned}$$

Conclusion : les deux valeurs demandées sont $a=3$ ou $a=1$

Exercice N° 3

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(0,\vec{u},\vec{v})$, On considère les points A , B et C d'affixes respectives $Z_A=1+5i$ et $Z_B=1-5i$ et $Z_C=5-3i$.

1. Déterminer le nombre complexe Z_D affixe du point D milieu du segment $[AC]$. .... (0,25)

On pose : $z_D=x_D+y_Di$.

D est milieu de $[AC]\Leftrightarrow z_D=\dfrac{z_A+z_C}{2}=\dfrac{(1+5i)+(5-3i)}{2}=\dfrac{6+2i}{2}=3+i$.

Conclusion : le nombre complexe $Z_D = 3+i$.

2. Soit h l'homothétie de centre de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$.

Déterminer le nombre complexe Z_E affixe du point E l'image de B par h. ………………………… (0,5)

Le point E l'image de B par h $\Leftrightarrow \overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AB}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$\Leftrightarrow z_E - z_A = \frac{1}{2}(z_B - z_A)$$

$$\Leftrightarrow z_E = \frac{1}{2}(z_B - z_A) + z_A$$

$$\Leftrightarrow z_E = \frac{1}{2}(z_A + z_B)$$

$$\Leftrightarrow z_E = \frac{(1+5i)+(1-5i)}{2} = 1$$

Rappel :

$h_{(\Omega,k)}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$

Conclusion : $z_E = 1$.

3. On considère la rotation R de centre C et d'angle $\left(\frac{-\pi}{2}\right)$, déterminer l'image de B par R. ……….. (0,5)

- L'écriture complexe de la rotation R est de la forme : $z' - \omega = (z-\omega)e^{i\theta}$.

  (avec $\omega = z_C = 5-3i$ est l'affixe du point C centre de la rotation et $\theta = -\frac{\pi}{2}$ est l'angle de la rotation R)

  D'où : $z' - z_c = (z - z_c)e^{i\frac{-\pi}{2}}$

  $$z' - (5-3i) = (z-(5-3i))e^{i\frac{-\pi}{2}}$$

  $$z' = 5-3i + (z-5+3i)\times(-i) \qquad \left(\text{car } -i = e^{i\frac{-\pi}{2}}\right)$$

  $$z' = 5-3i - iz + 5i + 3$$

  $$z' = -iz + 8 + 2i$$

  D'où : L'écriture complexe de la rotation R est $z' = -iz + 8 + 2i$.

  Conclusion : Écrire z' en fonction de z est : $z' = -iz + 8 + 2i$.

- On détermine l'image de B par R :

  le point B' d'affixe $z_{B'}$ est l'image de B par R.

  On a : $R(B) = B' \Leftrightarrow z_{B'} = -ib + 8 + 2i$

  $$\Leftrightarrow z_{B'} = -i(1-5i) + 8 + 2i$$

  $$\Leftrightarrow z_{B'} = -i - 5 + 8 + 2i$$

  $$\Leftrightarrow z_{B'} = 3 + i$$

  Donc $z_{B'} = 3 + i = z_D$ d'où $B' = D$

Conclusion : le point D d'affixe $z_{B'} = 3+i$ est l'image du point B par la rotation R .

4. Soit F le point d'affixe $Z_F = -1+i$.

a. Vérifier que $\dfrac{Z_D - Z_A}{Z_F - Z_A} \times \dfrac{Z_F - Z_E}{Z_D - Z_E} = -1$ . ... (0,25)

On a : $\dfrac{Z_D - Z_A}{Z_F - Z_A} \times \dfrac{Z_F - Z_E}{Z_D - Z_E} = \dfrac{3+i-(1+5i)}{-1+i-(1+5i)} \times \dfrac{(-1+i)-1}{3+i-1}$

$$= \frac{2-4i}{-2-4i} \times \frac{-2+i}{2+i}$$
$$= \frac{-4+2i+8i+4}{-4-2i-8i+4}$$
$$= \frac{\cancel{10}i}{-\cancel{10}i}$$
$$= -1$$

Conclusion : $\dfrac{Z_D - Z_A}{Z_F - Z_A} \times \dfrac{Z_F - Z_E}{Z_D - Z_E} = -1$.

b. En déduire que $\overline{\left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD}\right)} + \overline{\left(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EF}\right)} \equiv \pi\ [2\pi]$ . ... (0,5)

On a : $\overline{\left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD}\right)} + \overline{\left(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EF}\right)} \equiv \arg\left(\dfrac{Z_D - Z_A}{Z_F - Z_A}\right) + \arg\left(\dfrac{Z_F - Z_E}{Z_D - Z_E}\right)\ [2\pi]$

$$\equiv \arg\left(\frac{Z_D - Z_A}{Z_F - Z_A} \times \frac{Z_F - Z_E}{Z_D - Z_E}\right)\ [2\pi]$$
$$\equiv \arg(-1)\ [2\pi]$$
$$\equiv \pi\ [2\pi]$$

Conclusion : $\overline{\left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD}\right)} + \overline{\left(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EF}\right)} \equiv \pi\ [2\pi]$.

c. Dédéterminer forme trigonométrique du nombre $\dfrac{Z_E - Z_F}{Z_A - Z_F}$ et déduire la nature du triangle AEF.(0,5)

- Dédéterminer la forme trigonométrique du nombre $\dfrac{Z_E - Z_F}{Z_A - Z_F}$.

On a : $\dfrac{Z_E - Z_F}{Z_A - Z_F} = \dfrac{1-(-1+i)}{(1+5i)-(-1+i)}$

$$= \frac{2-i}{2+4i} = \frac{(2-i)(2-4i)}{(2+4i)(2-4i)} = \frac{\cancel{4}-8i-2i-\cancel{4}}{2^2+4^2} = \frac{-\cancel{10}i}{2\times\cancel{10}} = -\frac{1}{2}i$$
$$= \frac{1}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \left[\frac{1}{2}, -\frac{\pi}{2}\right]$$

Conclusion : la forme trigonométrique du nombre $\dfrac{Z_E - Z_F}{Z_A - Z_F} = -\dfrac{1}{2}i = \left[\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\pi}{2}\right]$.

- **Déduire la nature du triangle AEF.**

On a :

$$\arg\left(\frac{Z_E - Z_F}{Z_A - Z_F}\right) \equiv \arg\left(-\frac{1}{2}i\right) \quad [2\pi]$$

$$\overline{\left(\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FE}\right)} \equiv -\frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$$

Donc l'angle $\left(\overrightarrow{FA} \widehat{\,,\,} \overrightarrow{FE}\right)$ est un angle droit .

Conclusion : le triangle AEF est rectangle en F .

d. Déduire que les point A , D , E et F appartiennent à un cercle dont on déterminera un diamètre. (0,5)

On considère le quadrilatère convexe ADEF la somme des mesures des angles interieures qui sont : $\widehat{A}$, $\widehat{E}$, $\widehat{F}$ et $\widehat{D}$ est 2π .

$$\text{Donc : } \underbrace{\overline{\left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD}\right)} + \overline{\left(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EF}\right)}}_{\pi} + \underbrace{\overline{\left(\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{FA}\right)}}_{\frac{\pi}{2}} + \overline{\left(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DE}\right)} \equiv 2\pi \quad [2\pi]$$

- **Donc $\overline{\left(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DE}\right)} \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$ d'où le triangle DAE est rectangle en D d'où le triangle DAE est inscrit dans un cercle de diamètre $[AE]$.**
- **De même le triangle AEF est rectangle en F est inscrit dans un cercle de diamètre $[AE]$.**

Conclusion : les point A , D , E et F appartiennent à un cercle de diamètre $[AE]$.

Exercice N° 4

Une urne contient 10 boules : trois boules blanches et quatre boules rouges et cinq boules vertes , indiscernables au toucher. On tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne.

1. On considère les évènements suivants :

A « Obtenir exactement deux boules rouges ».

B « Obtenir exactement une boule verte ».

a. Montrer que $p(A) = \frac{12}{55}$ et $p(B) = \frac{21}{44}$. ………………………………………………………….....…(0,75)

❖ **Montrons que : $p(A) = \frac{12}{55}$.**

➢ **On calcule $\text{card}\Omega$: (ou encore le nombre des tirages possibles).**

Tirer simultanément 3 boules parmi 10 boules présente une combinaison de 3 parmi 12.

D'où le nombre des tirages possibles est le nombre des combinaisons de 3 parmi 12 ce nombre est :

$$\text{card}\Omega = C_{12}^{3} = \frac{12 \times 11 \times 10}{1 \times 2 \times 3} = 220 .$$

➢ **On calcule $\text{card}A$: (le nombre des tirages qui réalisent l'événement A) .**

L'événement A « Obtenir exactement deux boules rouges »

Ou encore l'événement A est « 2 boules tirées sont rouges et une boule parmi les boules les boules blanches et vertes » .

Tirées 2 boules rouges parmi 4 boules rouges de l'urne donc $C_4^2 = \frac{4\times 3}{1\times 2} = 6$ cas possibles.

Tirées 1 boule parmi 8 boules qui ne sont pas rouges de l'urne donc $C_8^1 = 8$ cas possibles. $\left(C_n^1 = n\right)$

Donc le nombre des tirages qui réalise l'événement A est $C_4^2 \times C_8^1 = 6\times 8 = 48$

Conclusion : $\boxed{p(A) = \frac{cardA}{card\Omega} = \frac{C_4^2 \times C_8^1}{C_{10}^3} = \frac{6\times 8}{220} = \frac{12}{55}}$.

❖ Montrons que : $p(B) = \frac{21}{44}$

➢ On calcule $cardB$: (le nombre des tirages qui réalisent l'événement B).
L'événement B « Obtenir exactement une boule verte »
Ou encore l'événement B est « une boule tirée est verte et 2 boules ne sont pas rouges » .

- Une boule tirée est verte parmi 5 boules vertes de l'urne on a $C_5^1 = 5$ cas possibles.
- 2 boules tirées simultanément ne sont pas vertes parmi 7 boules rouges et blanches de l'urne on a :
$C_7^2 = \frac{7\times 6}{2\times 1} = 21$ cas possibles.
- D'où : $cardB = C_5^1 \times C_7^2 = 5\times 21 = 105$

Donc : $p(B) = \frac{cardB}{card\Omega} = \frac{C_5^1 \times C_7^2}{C_{12}^3} = \frac{105}{220} = \frac{21\times \cancel{5}}{\cancel{5}\times 44} = \frac{21}{44}$.

Conclusion : $\boxed{p(B) = \frac{21}{44}}$

D'où : $\boxed{p(A) = \frac{12}{55} \text{ et } p(B) = \frac{21}{44}}$

b. Calculer $p\left(A/B\right)$ la probabilité de l'évènement A sachant que l'évènement B est réalisé. les évènements A et B sont-ils indépendants ? . ……………………………………………………....…(0,75)

- Calculons : $p(A\cap B)$:
On a l'événement $A\cap B$: « Obtenir exactement deux boules rouges et obtenir exactement une boule verte »
Ou encore l'événement $A\cap B$: « Obtenir deux boules rouges et une boule verte »
Donc $cardA\cap B = C_4^2 \times C_5^1 = 6\times 5 = 30$ d'où :
$$p(A\cap B) = \frac{cardA\cap B}{card\Omega} = \frac{C_4^2\times C_5^1}{C_{12}^3} = \frac{30}{220} = \frac{3\times \cancel{10}}{22\times \cancel{10}} = \frac{3}{22}$$
- Calculons $p\left(A/B\right)$:
On a : $p\left(A/B\right) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{3}{22}}{\frac{21}{44}} = \frac{\cancel{3}}{\cancel{22}} \times \frac{\cancel{22}\times 2}{\cancel{3}\times 7} = \frac{2}{7}$

Conclusion : $\boxed{p\left(A/B\right) = \frac{2}{7}}$

- L'indépendance de A et B :

On a : $p(A)=\frac{12}{55}$ et $p(B)=\frac{21}{44}$ donc $p(A)\times p(B)=\frac{12}{55}\times\frac{21}{44}=\frac{3\times\cancel{4}\times 21}{55\times\cancel{4}\times 11}=\frac{63}{605}$.

Par suite : $p(A\cap B)\neq p(A)\times p(B)$.

Conclusion : les évènements A et B ne sont pas indépendants.

Remarque : on peut utiliser la remarque suivante :

$$p(A/B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}\Rightarrow p(A\cap B)=p(A/B)\times p(B)$$

Donc L'indépendance de A et B exige $p(A\cap B)=p(A)\times p(B)=p(A/B)\times p(B)$ ou $p(A/B)=p(A)$

D'où : L'indépendance de A et B exige $p(A)\times p(B)=p(A/B)\times p(B)$

1ère méthode : $p(A\cap B)=p(A)\times p(B)=p(A/B)\times p(B)$

- $p(A)\times p(B)=\frac{12}{55}\times\frac{21}{44}=\frac{3\times\cancel{4}\times 21}{55\times\cancel{4}\times 11}=\frac{63}{605}$.
- $p(A/B)\times p(B)=\frac{2}{7}\times\frac{21}{44}=\frac{3}{22}$.
- Donc : $p(A)\times p(B)\neq p(A/B)\times p(B)$.

Conclusion : les évènements A et B ne sont pas indépendants.

2ième méthode : $p(A/B)=p(A)$

On a : $p(A/B)=\frac{2}{7}$ et $p(A)=\frac{12}{55}$ donc : $p(A/B)\neq p(A)$

Conclusion : les évènements A et B ne sont pas indépendants.

2. Soit la variable aléatoire X qui associe à chaque tirage le nombre de boules vertes tirées .

a. Déterminer la loi de probabilité de X. . ………………………………………………………………..…..(1)

✓ Les valeurs prises par X :

- Parmi les trois boules tirées aucune boule est verte la valeur prise par X est 0 .
- Parmi les trois boules tirées une seule boule est verte la valeur prise par X est 1 .
- Parmi les trois boules tirées deux boules sont vertes la valeur prise par X est 2 .
- Parmi les trois boules tirées trois boules sont vertes la valeur prise par X est 3 .

Conclusion : l'ensemble des valeurs prise par X est $\{0,1,2,3\}$.

✓ la loi de probabilité de la variable aléatoire X :

- L'événement $X=0$ « Parmi les trois boules tirées aucune boule est verte » .

Donc : $p(X=0)=\frac{card(X=0)}{card\Omega}=\frac{C_7^3}{C_{12}^3}=\frac{35}{220}=\frac{\cancel{5}\times 7}{44\times\cancel{5}}=\frac{7}{44}$; $\left(C_7^3=\frac{7\times 6\times 5}{1\times 2\times 3}=35\right)$

- L'événement $X=1$ « Parmi les trois boules tirées une seule boule est verte »

Donc : l'événement $X=1$ est l'événement B d'où : $p(X=1)=\frac{card(X=1)}{card\Omega}=p(B)=\frac{21}{44}$

- L'événement $X=2$ « Parmi les trois boules tirées deux boules sont vertes » Donc

$p(X=2)=\frac{C_5^2\times C_7^1}{220}=\frac{10\times 7}{220}=\frac{7}{22}$.

- L'événement $(X=3)$ « Parmi les trois boules tirées deux boules sont vertes » Donc

$p(X=3)=\frac{C_5^3}{220}=\frac{10}{220}=\frac{1}{22}$

Conclusion : le tableau suivant résume ce qui précède

x_i	0	1	2	3	total
$p(X=x_i)$	$\frac{C_7^3}{C_{12}^3}=\frac{7}{44}$	$p(B)=\frac{21}{44}$	$p(X=2)=\frac{C_5^2\times C_7^1}{220}=\frac{7}{22}$	$p(X=3)=\frac{C_5^3}{220}=\frac{1}{22}$	1

b. Calculer la probabilité d'obtenir au moins deux boules vertes . . ..(0,5)

1ère méthode :

On note l'événement C « Obtenir au moins deux boules vertes » avec $C=(X\geq 2)$

$$p(C)=p(X=2)+p(X=3)=\frac{7}{22}+\frac{1}{22}=\frac{8}{22}=\frac{4}{11}.$$

Conclusion : la probabilité d'obtenir au moins deux boules vertes est $p(C)=\frac{4}{11}$.

12ième méthode :

On note l'événement C « Obtenir au moins deux boules vertes »

L'événement contraire de C est $\overline{C}$ « Obtenir au plus une boule verte ».

On a : $\overline{C}=(X=0)\cup(X=1)$ d'où :

$$p(\overline{C})=p(X=0)+p(X=1)=\frac{7}{44}+\frac{21}{44}=\frac{28}{44}=\frac{7}{11}\Rightarrow p(C)=1-p(\overline{C})=1-\frac{7}{11}=\frac{4}{11}.$$

Conclusion : la probabilité d'obtenir au moins deux boules vertes est $p(C)=\frac{4}{11}$.

Problème

Soit f la fonction numérique définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x)=x^4(\ln x-1)^2 & ; x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$.

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité : 1 cm).

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis déterminer la branche infinie de (C) au voisinage $+\infty$ . ... (0,75)

- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^4=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x-1)^2=+\infty$.

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^4(\ln x-1)^2=+\infty$.

Conclusion : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

- Déterminer la branche infinie de (C) au voisinage $+\infty$:

  - On détermine $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4(\ln x-1)^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}x^3(\ln x-1)^2=+\infty \text{ car } \lim_{x\to+\infty}x^3=+\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty}(\ln x-1)^2=+\infty$$

D'où : $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$.

Conclusion : **la courbe (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des Ordonnées au voisinage de $+\infty$.**

2.

a. **Montrer que f est continue à droite de 0.** …………………………………………………… (0,5)

Calculons $\lim_{x\to0^+}f(x)$:

On a : $\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}x^4(\ln x-1)^2$

$$=\lim_{x\to0^+}x^2\left(x(\ln x-1)\right)^2=\lim_{x\to0^+}x^2(x\ln x-x)^2=0$$

car $\lim_{x\to0^+}x^2=0$ et $\lim_{x\to0^+}x\ln x=0$

D'où : $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=0$.

Conclusion : **f est continue à droite de 0.**

b. **Étudier la dérivabilité de f à droite en 0 puis interpréter le résultat géométriquement.** ………… (0,5)

On a : $\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^4(\ln x-1)^2-0}{x}$

$$=\lim_{x\to0^+}x^3(\ln x-1)^2=\lim_{x\to0^+}x\left(x(\ln x-1)\right)^2$$

$$=\lim_{x\to0^+}x(x\ln x-x)^2=0\in\mathbb{R} \text{ car } \lim_{x\to0^+}x=0 \text{ et } \lim_{x\to0^+}x\ln x=0$$

D'où : $\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$.

Conclusion : **f est dérivable à droite de 0 et le nombre dérivé à droite du point $x_0=0$ est $f_d(0)=0$.**

Interpréter le résultat géométriquement :

Puisque $f_d(0)=0$ on conclue que la courbe représentative (C) de f admet une demi tangente à droite du point $x_0=0$ parallèle à l'axe des abscisses d'équation $y=0$ (ou bien horizontale).

3. .

a. **Montrer que $f'(x)=2x^3(\ln x-1)(2\ln x-1)$ pour tout x de l'intervalle $]0,+\infty[$.** ……………… (0,75)

On a : $f'(x)=\left(x^4(\ln x-1)^2\right)'$

$$=\left(x^4\right)'\times(\ln x-1)^2+x^4\left((\ln x-1)^2\right)'=4x^3\times(\ln x-1)^2+x^4\times2(\ln x-1)'(\ln x-1)^{2-1}$$

$$=4x^3\times(\ln x-1)^2+x^4\times2\times\frac{1}{x}(\ln x-1)=4x^3\times(\ln x-1)^2+x^3\times2(\ln x-1)$$

$$=2x^3(\ln x-1)\left[2(\ln x-1)+1\right]=2x^3(\ln x-1)(2\ln x-1)$$

Conclusion : $f'(x) = 2x^3(\ln x - 1)(2\ln x - 1)$ pour tout x de l'intervalle $]0,+\infty[$.

b. Dresser le tableau de variations de la fonction f. ………………………………………………… (0,5)

- Le signe de f'' sur $]0,+\infty[$.
  - Le signe de f'' est le signe de $(\ln x - 1)(2\ln x - 1)$.

Signe de $\ln x - 1$:

$\ln x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq 1$

$\Leftrightarrow \ln x \geq \ln e$, (ou $x \geq e^1$)

$\Leftrightarrow x \geq e$

Signe de $2\ln x - 1$:

$2\ln x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \ln x \geq \ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right)$, (ou $x \geq e^{\frac{1}{2}}$)

$\Leftrightarrow x \geq e^{\frac{1}{2}}$, $e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

x	0		$\sqrt{e}$		e		$+\infty$
$\ln x - 1$	||	$-$	|	$-$	0	$+$	
$2\ln x - 1$	||	$-$	0	$+$	|	$+$	
$f'(x)$	|| 0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(\sqrt{e}) = \frac{e^2}{4} \simeq 1,8$	$\searrow$	$f(e) = 0$	$\nearrow$	$+\infty$

4. .

a. Sachant que $f''(x) = 2x^2(6\ln x - 5)\ln x$ pour tout x de l'intervalle $]0,+\infty[$, étudier le signe de $f''(x)$ sur $]0,+\infty[$. ………………………………………………… (0,5)

Le signe de $f''(x)$ est le signe de $(6\ln x - 5)\ln x$.

Signe de $\ln x$: (ce signe est déjà déterminer dans la classe).

$\ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq \ln 1$

$\Leftrightarrow x \geq 1$

Signe de $6\ln x - 5$:

$6\ln x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq \frac{5}{6}$

$\Leftrightarrow \ln x \geq \ln\left(e^{\frac{5}{6}}\right)$, (ou $x \geq e^{\frac{5}{6}}$)

$\Leftrightarrow x \geq e^{\frac{5}{6}}$

- Signe de $f''(x)$ suivant un tableau :

x	0		1		$e^{\frac{5}{6}}$		$+\infty$
$\ln x$	||	$-$	0	$-$	|	$+$	
$6\ln x-5$	||	$-$	|	$+$	0	$+$	
$f''(x)$	||	$+$	0	$-$	0	$+$	

b. Déduire que la courbe (C) admet deux points d'inflexion dont on déterminera les abscisses. .... (0,5)

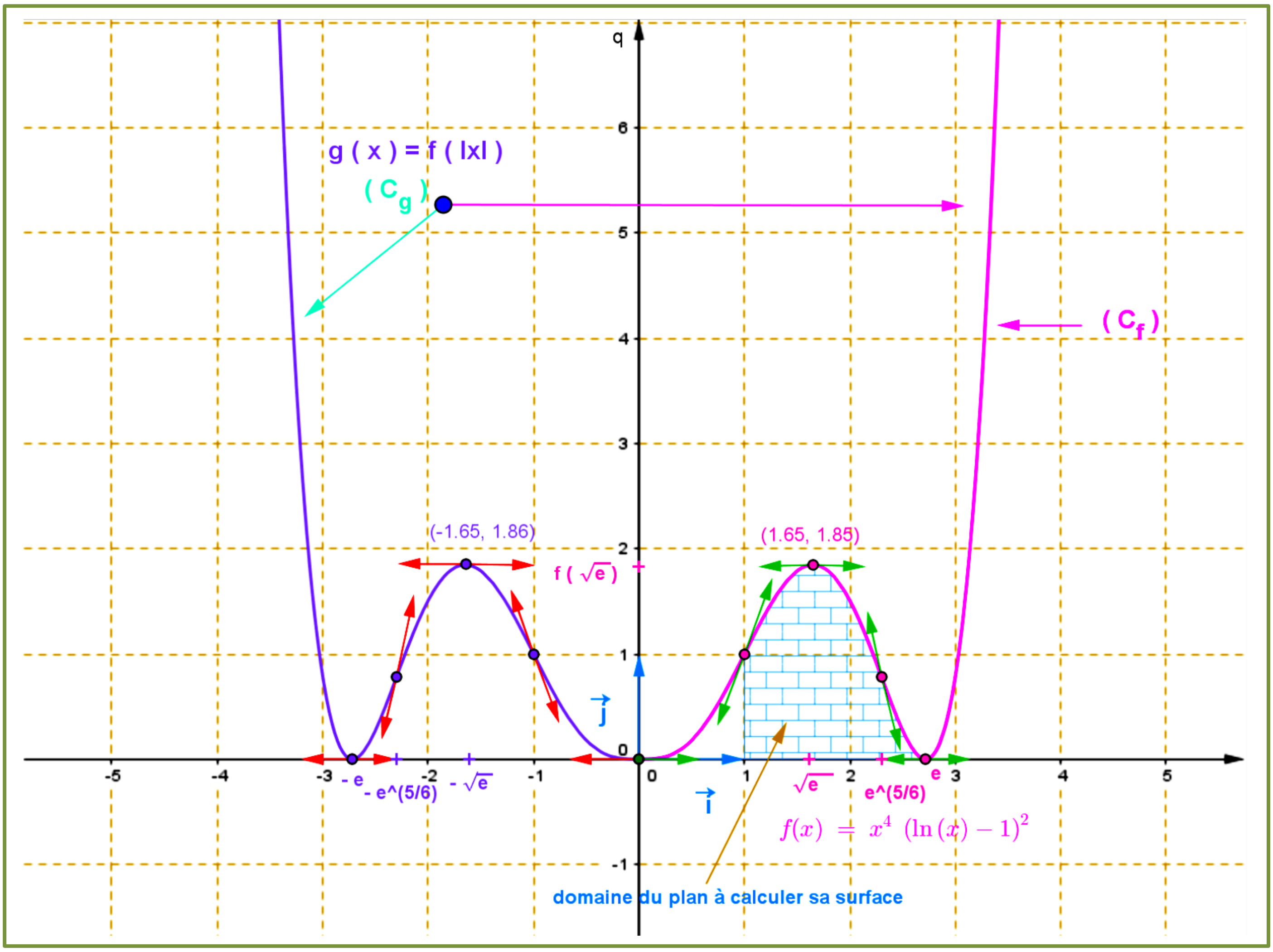
D'après le tableau des signes de $f''(x)$; on remarque :

- Au point $x_1 = e^{\frac{5}{6}}$ on a $f''(x)$ s'annule et change de signe au voisinage de ce point ; de même au point $x_2 = 1$ d'où la conclusion suivante :

Conclusion : la courbe (C) admet deux points d'inflexion dont les abscisses sont $x_1 = e^{\frac{5}{6}}$ et $x_2 = 1$.

5.

a. Construire la courbe (C) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ (on prend $\sqrt{e} \simeq 1{,}6$ et $e^2 \simeq 7{,}2$). ……………… (1)



b. En utilisant la courbe (C). Déterminer le nombre de solutions de l'équation $x^2(\ln x-1)=-1$. .(0,5)

1er cas : $x \geq e$ donc $x^2 \geq 0$ et $\ln x-1 \geq 0 \Rightarrow x^2(\ln x-1) \geq 0$ et $x^2(\ln x-1)=-1$ impossible donc : pas de solution

2ième cas : $0<x<e$

On pose :

On a : $x^2(\ln x-1)=-1 \Rightarrow \left(x^2(\ln x-1)\right)^2=(-1)^2$.

$$\Rightarrow f(x)=1$$

D'après, la courbe on a 2 solutions

Conclusion : l'équation $x^2(\ln x-1)=-1$ admet deux solutions.

6. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=f(|x|)$.

a. Montrer que la fonction g est paire. .... (0,5)

- On a pour tout x de $\mathbb{R}$ aussi $-x \in \mathbb{R}$.
- Soit x de $\mathbb{R}$ on a : $g(-x)=f(|-x|)$

$$=f(|x|)=g(x)$$

Donc $g(x)=g(-x)$

Conclusion : la fonction g est une fonction paire sur $\mathbb{R}$.

b. Construire (C_g) la courbe représentative de g dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ . ... (0,5)

Voir la figure précédente

7. .

a. On pose $I=\int_1^e x^4(\ln x-1)dx$ en utilisant une intégration par parties , montrer que $I=\frac{6-e^5}{25}$. (0,5)

On utilise la disposition suivante :

$$u(x)=\ln x-1 \qquad u'(x)=\frac{1}{x}$$

$$(1)\downarrow \qquad (2)\searrow \quad - \quad \downarrow(3)$$

$$v'(x)=x^4 \qquad v(x)=\frac{1}{5}x^5$$

D'où : $\int_1^e x^4(\ln x-1)dx=\left[(\ln x-1)\frac{1}{5}x^5\right]_1^e-\int_1^e \frac{1}{x}\times\frac{1}{5}x^5dx$

$$=\Big(\underbrace{\ln e-1}_{=0}\Big)\frac{1}{5}e^5-\Big(\underbrace{\ln 1}_{=0}-1\Big)\frac{1}{5}1^5-\frac{1}{5}\int_1^e x^4dx$$

$$=0+\frac{1}{5}-\frac{1}{5}\left[\frac{1}{5}x^5\right]_1^e=0+\frac{1}{5}-\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}(e^5-1^5)=0+\frac{1}{5}-\frac{1}{25}(e^5-1)$$

$$=\frac{1}{5}-\frac{1}{25}e^5+\frac{1}{25}=\frac{6}{25}-\frac{1}{25}e^5=\frac{6-e^5}{25}$$

Conclusion : $\boxed{I=\int_1^e x^4(\ln x-1)dx=\frac{6-e^5}{25}}$

b. On considère la fonction h définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par $h(x)=x^5(\ln x-1)^2$.

vérifier que $h'(x)=5f(x)+2x^4(\ln x-1)$. .... (0,5)

On a : $h'(x)=\left[x^5(\ln x-1)^2\right]'=(x^5)'(\ln x-1)^2+x^5\left((\ln x-1)^2\right)'$

$$=5x^4(\ln x-1)^2+x^5\times2(\ln x-1)'(\ln x-1)^{2-1}$$

$$=5\underbrace{x^4(\ln x-1)^2}_{f(x)}+x^5\times2\times\frac{1}{x}(\ln x-1)=5f(x)+2x^4(\ln x-1)$$

Conclusion : $\boxed{h'(x)=5f(x)+2x^4(\ln x-1)}$.

c. Déduire que $\int_1^e f(x)dx=-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}I$ . ... (0,5)

On a : $h'(x)=5f(x)+2x^4(\ln x-1)\Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{5}\left(h'(x)-2x^4(\ln x-1)\right)$

Donc : $f(x)=\frac{1}{5}h'(x)-\frac{2}{5}x^4(\ln x-1)$

$$\int_1^e f(x)dx=\int_1^e\left(\frac{1}{5}h'(x)-\frac{2}{5}x^4(\ln x-1)\right)dx$$

$$=\frac{1}{5}\int_1^e\frac{1}{5}h'(x)dx-\frac{2}{5}\int_1^e\left(x^4(\ln x-1)\right)dx=\frac{1}{5}\left[h(x)\right]_1^e-\frac{2}{5}\times I=\frac{1}{5}\left(h(e)-h(1)\right)-\frac{2}{5}\times I$$

$$=\frac{1}{5}\left(e^5\Big(\underbrace{\ln e-1}_{=0}\Big)^2-1^5(\ln1-1)^2\right)-\frac{2}{5}\times I=\frac{1}{5}(0-1)-\frac{2}{5}\times I=-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}I$$

Conclusion : $\boxed{\int_1^e f(x)dx=-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}I}$

d. Calculer l'aire du domaine délimitée par la courbe (C) et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$. .... (0,5)

La surface demandée à calculer en cm^2 est :

$\int_1^e|f(x)|dx\times\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|=\int_1^e f(x)dx\times\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|$. Car $f(x)\geq0$ pour tout $x\geq0$.

$$=\left(-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}I\right)\times1\times1\ cm^2 \text{ car } \|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1cm$$

$$=-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}\times\frac{6-e^5}{25}\ cm^2=\frac{1}{5}\left(-1+\frac{2e^5-12}{25}\right)cm^2=\frac{1}{5}\left(\frac{2e^5-37}{25}\right)cm^2=\frac{2e^5-37}{125}\ cm^2$$

Conclusion : $\boxed{\text{l'aire demandée est } \frac{2e^5-37}{125}\ cm^2}$.

Fin